estado propuesto por Wang [2], para un proceso SISO, y su representación está dada por:

$$\boldsymbol{x}_m(k+1) = \boldsymbol{A}_m\boldsymbol{x}_m(k) + \boldsymbol{B}_m u(k) \quad (1)$$

$$y(k) = \boldsymbol{C}_m\boldsymbol{x}_m(k) + \boldsymbol{D}_m u(k) \quad (2)$$

Donde, el subíndice "m" hace referencia al modelo de la planta, u(k) es la entrada al modelo de la planta, y(k) es la salida de la planta y $x_m(k)$ es el vector de estado de la planta, todos en el instante k.

Para los modelo discretos, la entrada u(k) no afecta a la salida y(k), es decir ***Dm*** = ***0***, por lo tanto (2) queda:

$$y(k) = \boldsymbol{C}_m\boldsymbol{x}_m(k) \quad (3)$$

El MPC incluye un integrador que corrige el error en estado estacionario, dicho el procedimiento está claramente explicado en [3]. Aquí sólo se mostrarán algunas ecuaciones y los procedimientos principales.

Restando (1) y su equivalente para $\mathbf{x_m}$ (k), se obtiene:

$$\Delta\boldsymbol{x}_m(k+1) = \boldsymbol{A}_m\Delta\boldsymbol{x}_m(k) + \boldsymbol{B}_m\Delta u(k) \quad (4)$$

Donde:

$$\Delta\boldsymbol{x}_m(k+1) = \boldsymbol{x}_m(k+1) - \boldsymbol{x}_m(k) \quad (5)$$

Para $\Delta\boldsymbol{x}_m(k)$, $\Delta u(k)$ se aplica el procedimiento similar al aplicado a $\Delta\boldsymbol{x}_m(k+1)$ en (5).

Similarmente a partir de (3) se tiene:

$$\begin{aligned} y(k+1) - y(k) &= \boldsymbol{C}_m[\boldsymbol{x}_m(k+1) - \boldsymbol{x}_m(k)\,] \\ &= \boldsymbol{C}_m\Delta\boldsymbol{x}_m(k+1) \end{aligned} \quad (6)$$

Sustituyendo (4) en (6) se obtiene:

$$y(k+1) = \boldsymbol{C}_m\boldsymbol{A}_m\Delta\boldsymbol{x}_m(k) + \boldsymbol{C}_m\boldsymbol{B}_m\Delta u(k) + y(k) \quad (7)$$

Definiendo ahora el estado aumentado, según se explica en [3]:

$$\boldsymbol{x}(k) = [\Delta\boldsymbol{x}_m^T(k) \quad y(k)]^T \quad (8)$$

A partir de (4) y (7) se obtiene el modelo espacio-estado aumentado:

$$\overbrace{\begin{bmatrix}\Delta\boldsymbol{x}_m(k+1) \\ y(k+1)\end{bmatrix}}^{x(k+1)} = \overbrace{\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_m & \mathbf{0}_m^T \\ \boldsymbol{C}_m\boldsymbol{A}_m & 1\end{bmatrix}}^{A}\overbrace{\begin{bmatrix}\Delta\boldsymbol{x}_m(k) \\ y(k)\end{bmatrix}}^{x(k)} + \overbrace{\begin{bmatrix}B_m \\ C_mB_m\end{bmatrix}}^{B}\Delta u(k) \quad (9)$$

$$y(k) = \overbrace{[\mathbf{0_m} \quad \mathbf{1}]}^{C}\overbrace{\begin{bmatrix}\Delta\boldsymbol{x}_m(k) \\ y(k)\end{bmatrix}}^{x(k)} \quad (10)$$

De forma matricial compacta:

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{B}\Delta u(k) \quad (11)$$

$$y(k) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(k) \quad (12)$$

En la estrategia MPC se calculan los N_c valores futuros de la señal de control

$$\Delta u(k), \Delta u(k+1), \dots, \Delta u(k+Nc-1) \quad (13)$$

Estos valores son los que minimizan la diferencia entre el valor de referencia y el valor pronosticado de la salida, a lo largo de un horizonte de predicción (ventana de optimización) de N_p valores futuros.

Para resolver esto es necesario pronosticar N_p estados futuros, a partir de (11)

$$\mathbf{x}(k+1|k), \mathbf{x}(k+2|k), \dots, \mathbf{x}(k+m|k), \dots, \mathbf{x}(k+Np|k) \quad (14)$$

donde x(k+m|k) denota el pronóstico del estado en k+m, dada la información de estado actual x(k).

En consecuencia los N_p valores pronosticados de la salida, utilizando (12) corresponden a:

$$y(k+1|k), y(k+2|k), \dots, y(k+m|k), \dots, y(k+Np|k) \quad (15)$$

Desarrollando, agrupando y ordenando, llegamos a la ecuación en forma matricial compacta:

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{x}(k) + \emptyset\Delta\boldsymbol{U} \quad (16)$$

Donde para el sistema SISO:

$$\boldsymbol{Y} = \left[y(k+1|k) \quad y(k+2|k) \quad \dots \quad y\left(k+N_p|k\right)\right]^T \quad (17)$$

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{CA} \\ \boldsymbol{CA}^2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{CA}^{N_p}\end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\emptyset = \begin{bmatrix}\boldsymbol{CB} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{CAB} & \boldsymbol{CB} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{CA}^{N_p-1}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{CA}^{N_p-2}\boldsymbol{B} & \cdots & \boldsymbol{CA}^{N_p-N_c}\boldsymbol{B}\end{bmatrix} \quad (19)$$

$$\Delta\boldsymbol{U} = [\Delta u(k) \quad \Delta u(k+1) \quad \dots \quad \Delta u(k+\boldsymbol{N_c}-\mathbf{1})]^T \quad (20)$$

El valor de referencia r(k) se mantiene constante a lo largo de la ventana de optimización (de longitud $\mathbf{N_p}$), y la función objetivo a minimizar para calcular los $\mathbf{N_c}$ valores futuros de la señal de control es:

$$\boldsymbol{J} = (\boldsymbol{R_S}-\boldsymbol{Y})^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{R_S}-\boldsymbol{Y}) + \Delta\boldsymbol{U}^{\boldsymbol{T}}\overline{\boldsymbol{R}}\Delta\boldsymbol{U} \quad (21)$$

Donde:

$$\boldsymbol{R_S^T} = \overbrace{[1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1]}^{\boldsymbol{N_p^T}}\, r(k) = \overline{\boldsymbol{R}}_S r(k) \quad (22)$$

$$\overline{\boldsymbol{R}} = r_w\boldsymbol{I}_{\boldsymbol{N_c}x\boldsymbol{N_c}} \quad (23)$$

r_w es un parámetro de configuración del MPC, constante y es una medida inversamente proporcional a la magnitud de la variable manipulada.

De (21) la condición necesaria para que ocurra el mínimo de J con respecto a $\Delta\boldsymbol{U}$ es que

$$\frac{\partial J}{\partial\Delta\boldsymbol{U}} = 0 \quad (24)$$